

2010 TOPCO 崇越論文大賞

論文題目：

隨機波動

美式最低收益投資保證商品之分析解

報名編號：B0057

摘要

最低收益保證型商品賦予投資者在到期日之前獲得最基本的保證收益，其為目前金融市場最活絡的商品之一。本研究除了考慮投資人可以提前履行最低收益商品的美式選擇權之外，同時考慮標的資產具有隨機之特性，發展出隨機波動美式最低收益投資保證商品之分析解。此外，本研究同時探討在其他參數變動之下對於最低收益保證型商品價格變動的敏感度分析。透過數值分析的結果顯示，本研究的分析解可以提供學術界與實務界一個具有效率性與正確性的評價模型。

關鍵詞：美式選擇權、分析解、提前履約、保證型商品、隨機波動。

壹、緒論

最低收益保證型商品在目前金融市場上應用是十分廣泛，此種商品提供投資人有權決定自己的連結標的投資組合，投資者自行承擔連結標的投資組合損益，發行公司給予投資者投資保障，當契約到期時，附與投資者有最小的投資收益。

近年利率低迷加上景氣因素，使得投資人趨向購買結構型商品，起初在國內法令尚未開放以新台幣計價的結構型商品，國內投資者可以選擇投資海外連動式債券，由於較不易掌握商品相關資訊，且需承擔匯率風險，投資者權益因而無法被有效保障。因此，證期會在 2001 年 7 月同意投信公司發行保本型基金，中央銀行也在 2001 年底原則上允許保本型基金可以投資海外衍生性商品。政府於 2003 年開放證券商在店頭市場推出以新台幣計價之「保本型債券」、「高收益型債券」及「股權交換」等商品，推動多樣化的投資管道。

保險界上的應用，在台灣保險監理當局尚未開放不分紅保單之前，台灣的保險公司所推出的保單更全都是保證分紅保單。目前在台灣所發行的利率保證型保單，大部分是連結到國外貨幣，以國泰人壽世界通外幣變額年金保險第一期為例，投資幣別為澳幣，保證最低報酬率為 35%，由此可以知道對於保險人所面對的風險即為匯兌風險、最低保證利率與國內的利率，大部分的權益連結年金保

險商品，多為多資產投資組合方式當作投資標的，舉例來說：新光人壽金萬利保本變額壽險契約，標的資產為多資產型，分別為 S&P 500、DJ Euro Stoxx 50、Nikkei 225，而權重各為三分之一；最低收益保證型商品模式可以應用的層面很廣，所以本研究針對最低收益保證型商品進行定價，根據 Grosen 和 Jorgensen (1997) 提出，最低收益保證型商品的價格可以視為選擇權與現貨投資組合，定價出最低收益保證型價格，所以本研究以此作為研究架構；此外，國內最低收益保證型商品皆為滿期保證，也就是說契約到期，投資公司才給予保證，假若投資者提前解約是不具此最低保證，本次研究將其條件放寬，商品到期前投資者擁有解約權力，即為美式最低收益保證型商品。此研究提出在考慮隨機波動之下，定價最低收益保證型商品的價格，此外也考慮具有提前履約的情況，即美式最低收益保證型商品；研究的目的是為下：第一、以 Grosen 和 Jorgensen 提出最低收益保證型商品的定價方式為架構，將波動度部分修改成隨機波動模型，推導出考慮隨機波動之下歐式最低收益保證型的定價模型。第二、利用美式選擇權定價技術，應用到評價美式最低收益保證型商品。第三、加入情境分析探討，若投資者將手頭上的資金，全額的投入，投資公司給予的保本率為八成，例如：契約投資金額為新台幣一百萬，若投資在台指 50 的金額為 80 萬，這樣的情境牽涉到保本率的問題，所以本文將探討不同的保本率之下，對於美式最低收益保證型商品的價格影響，最後討論在隨機波動模型下，參數變化對於最低收益保證型的敏感度分析。本研究架構如下，第一部分緒論，第二部分文獻回顧，第三部分定價模型，第四部分實驗結果與分析，第五部分結論以及建議。

貳、文獻回顧

最低收益保證型商品是指發行公司答應投資者在購買此契約開始，會有最低的保證利率，簡單來說就是投資者在契約終止時，最小的獲利報酬即為保證利率，此商品具有保本的效果，若此商品讓投資者在到期之前具有提前履約的權利，則此為美式最低收益保證型商品。過去針對最低收益保證型商品定價的文獻，大多

是討論歐式情況，即表示雙方契約訂定，發行公司只有在到期日當天，給予投資者最小的獲利報酬，若在到期日之前，投資者解約，發行公司就不做任何保證；Boyle 與 Schwartz (1977) 、Brennan 和 Schwartz (1976) 等人，提出歐式最低收益保證型商品定價，Grosen 和 Jorgensen (1997) 推廣在固定波動之下，利用選擇權的定價技術評價美式最低收益保證型商品；假設發行公司，給予保證最低報酬率 r_G ， G 為期初投資者投資金額，利用簡單複利方式計算出第 t 時點的保證價值為 $Ge^{r_G t}$ ，則最低收益保證型商品的損益方程用下列式子表示：

$$C_T \equiv \max\left(Ge^{r_G T}, S_T\right) \quad (1)$$

表示在到期 T ，最低收益保證型商品的價值 C_T 為期初投資金額在保證利率之下的價值與投資標的價值 (S_T) 取大值，此外保證利率 r_G 介在 $[0, r_d]$ 之間。最後透過轉換以及平賭 (Martingale) 的概念，得到評價最低收益保證型商品可以視為選擇權賣權與現貨資產投資組合，即下式：

$$\Gamma_0^E = \left(\text{put}(S_0, T) + G\right), \quad S_0 = G$$

其中 $\text{put}(S_0, T)$ 定義為期初的賣權價值。評價歐式最低收益保證型商品可以看成歐式賣權投資組合，相同的方式應用到評價美式最低收益保證型商品。隨機波動模型選擇權定價的回顧，最著名是 Hull 與 White (1987) 提出隨機波動模型的選擇權定價，Hull 與 White 對於隨機波動模型是將原先的 Black-Scholes 模型中對於股價 S_t 的隨機過程中的波動度 (σ^2) 部分再加上另一條隨機過程 V_t ，推導出隨機波動歐式選擇權價格近似解，但是在 Hull 與 White 所貢獻選擇權近似解，最主要的問題是兩隨機過程的相關係數若 ρ 不為零，近似解就無法靈活運用，此外在隨機波動的部分，給定參數值不好時，則會使得股價的波動度會有負值產生。隨後，Heston (1993) 文獻，在隨機波動項的部分作了變動，採用 CIR 模型，利用特徵函數的方法，推導出隨機波動的近似解，即式子 (2)：

$$C_{SV}(S_t, V_t, t) = S_t P_1 - K e^{-(r-q)(T-t)} P_2 \quad (2)$$

其中， $C_{SV}(S_t, V_t, t)$ 表示隨機波動模型下買權在 $T=t$ 時的價格， P_1 表示在隨機波動之下，股價受到波動影響的機率值，而 P_2 表示在隨機波動之下，選擇權價值落在價內的機率值， $P_j, j=1,2$ 公式如下：

$$P_j(S_0, V_0, T; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(X_0, V_0, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (3)$$

其中，

$$f_j(X_0, V_0, T; \phi) = \operatorname{Exp}(C_j(T-t; \phi) + D_j(T-t; \phi) V_0 + i\phi X_0)$$

$$C_j(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2 \ln \left[\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g} \right] \right\}$$

$$D_j(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right]$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}, \quad d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}$$

$$u_1 = 0.5, u_2 = -0.5, a = \kappa\theta, b_1 = \kappa - \rho\sigma, b_2 = \kappa, j=1, 2$$

Heston 所推導出的隨機波動選擇權的近似解，解決 Hull 與 White 無法討論相關係數的問題，而 Heston 隨機波動選擇權近似解更為一般化形式，因此本研究採用此隨機波動模型來推廣推廣。緊接著關於美式選擇權定價的研究，最早由 Merton (1973) 文獻中指出評價美式賣權比歐式賣權更不容易，原因是投資者在到期日之前，提前履約的機率比繼續持有機率高，並不確定何時會發生提前履約的情況，使得定價美式選擇權是十分不容易，過去主要定價美式選擇權有下列的想法，首先 Geske 與 Johnson (1984) 文中，假設履約時點是離散情況並非是連續情況，提出找尋關鍵價格的想法，繼續持有選擇權價值會等於馬上履約價值的標的資產價格，此價格稱為關鍵價格。有了找尋關鍵價格的想法，將不同履約時點的百慕達選擇權利用外插法近似美式選擇權價格，Barone-Adesi 與 Whaley (1987)

提出美式選擇權價格等於歐式選擇權價格加上風險貼水，而後 Huang (1996) 等人在文獻中，利用積分形式表示風險貼水部分，再用外差法方式去定價美式選擇權價格。上述回顧了最低收益商品、隨機波動模型以及美式選擇權定價方式，本研究將採用 Huang 等人提出的方法用來定價美式選擇權，加入 Heston 隨機波動模型，定價出考慮隨機波動模型之下美式最低收益保證型商品定價模型。

參、定價模型

本研究將 Grosen 和 Jorgensen 原先固定波動模型擴展成考慮隨機波動的情況，並且應用 Huang 等人定價美式選擇權方法應用到評價美式最低收益保證型商品。假設股價 S_t 、波動度 V_t 服從下列隨機過程，

$$\begin{aligned} dS_t &= (r-q) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dz(t) \\ dV_t &= \kappa (\theta - V_t)dt + \xi \sqrt{V_t} d\omega(t) \end{aligned}$$

其中 r 為無風險利率， q 為股利率， κ 為均數回歸速率， θ 為長期的均數復歸值， ξ 為波動度的波動度，起始波動 $V_0 = \sigma^2$ ，考慮隨機波動下的最低收益保證型商品損益方程 C_T^{SV} ，如下：

$$C_T^{SV} \equiv \max(G \times \delta \times e^{r_G T}, S_T)$$

定義 $\gamma_0(G, G \times \delta, V_0, T, r^*, r_G)$ 表示歐式最低收益保證型商品期初價值，推導如下，

$$\begin{aligned} \gamma_0(G, G \times \delta, V_0, T, r^*, r_G) &= E^Q \left[e^{-(r-q)T} C_T^{SV} \right] \\ &= E^Q \left[e^{-(r-q)T} \max(G \times \delta \times e^{r_G T}, S_T) \right] \\ &= E^Q \left\{ e^{-(r-q)T} e^{r_G T} \max(G \times \delta \times e^{-r_G T} S_T, 0) \right\} + E^Q \left\{ e^{-(r-q)T} S_T \right\} \\ &= E^Q \left\{ e^{-(r^*-q)T} \max(G \times \delta \times e^{-r_G T} S_T, 0) \right\} + E^Q \left\{ e^{-(r-q)T} S_T \right\} \\ &= \text{put}_{sv}(S_0, G \times \delta, V_0, T, r^*, q) + E^Q \left\{ e^{-(r-q)T} S_T \right\} \end{aligned}$$

其中 $\text{put}_{sv}(G, G \times \delta, V_0, T, r^*, q)$ 表示隨機波動模型的歐式價格，期初資產價值 $S_0 = G$ ， $G \times \delta$ 表示在投資者投資的總金額 G 時，投資公司願意費給投資者的保證金額比例為 δ ，起始波動 V_0 ，期間為 T ， $r^* = r - r_G$ ，在風險中立之下，資產價格的期望值必為平賭，所以可以得到歐式最低收益保證型商品期初價值：

$$\gamma_0 = \text{put}_{sv}(S_0, G \times \delta, V_0, T, r^*, q) + G \quad (4)$$

定義 $\Gamma_0(S_0, G \times \delta, V_0, T, r^*, q)$ 為美式最低收益保證型商品期初價值，則評價美式賣權則利用 Huang 等人提出的方法，即：

$$\Gamma_0(S_0, G \times \delta, V_0, T, r^*, q) = \gamma_0(S_0, G \times \delta, V_0, T, r^*, q) + \int_0^T \left[r^* e^{-r^* t} (1 - P_2(S_t, \bar{S}_t, v_0, t)) - q e^{-qt} (1 - P_1(S_t, \bar{S}_t, v_0, t)) \right] dt$$

上面式子可以看出美式最低收益保證型商品價格等於歐式最低收益保證型商品價格加上風險貼水部分，風險貼水部份牽涉到兩點，第一是關鍵價格 $\bar{S}_t$ ，第二是隨機波動之下的機率分配，找尋關鍵價格 $\bar{S}_t$ 部分，利用繼續持有選擇權價值會等於馬上履約價值的觀念去尋找，必須服從下列式子：

$$\begin{aligned} & \text{Max}(\bar{S}_t, G * \delta * e^{r^* T}) \\ & = \gamma_0(\bar{S}, G \times \delta, V_0, T, r^*, q) + \int_0^T \left[r^* e^{-r^* t} (1 - P_2(S_t, \bar{S}_t, v_0, t)) - q e^{-qt} (1 - P_1(S_t, \bar{S}_t, v_0, t)) \right] dt \end{aligned}$$

接者是隨機波動之下機率分配，在 Heston 分析解中，可以知道

$$P_j(S_0, V_0, T; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-i\varphi \ln[K]} f_j(X_0, V_0, T; \varphi)}{i\varphi} \right] d\varphi$$

而 $P_1(S_0, V_0, T; \ln[K])$ 與 $P_2(S_0, V_0, T; \ln[K])$ 所扮演的角色和 Black-Scholes 封閉解的 $N(d_2)$ 、 $N(d_1)$ 一樣，因此可以應用到 Huang 的方法，由於風險貼水的積分式子若考慮連續時點較不易計算，最後利用 Geske 和 Johnson 外插方法，利用四種不同履約時點百慕達式選擇權近似美式最低收益商品價格，即 (5) 式：

$$\hat{P}_0 = \Pi_4 + (29/3) \times (\Pi_4 - \Pi_3) - (23/6) \times (\Pi_3 - \Pi_2) + (1/6) \times (\Pi_2 - \Pi_1) \quad (5)$$

$$\Pi_1 = \gamma_0(S_0, G \times \delta, V_0, T, r^*, q)$$

$$\Pi_2 = \gamma_0(S_0, G \times \delta, V_0, T, r^*, q) + \frac{r^* T}{2} e^{-\frac{(r^* - q)T}{2}} \left(1 - P_2\left(S_0, \bar{S}_{\frac{T}{2}}, v_0, \frac{T}{2}\right) \right) - \frac{qT}{2} e^{-\frac{qT}{2}} \left(1 - P_1\left(S_0, \bar{S}_{\frac{T}{2}}, v_0, \frac{T}{2}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 = \gamma_0(S_0, G \times \delta, V_0, T, r^*, q) + \frac{r^* T}{3} e^{-\frac{r^* T}{3}} \left(1 - P_2\left(S_0, \bar{S}_{\frac{T}{3}}, v_0, \frac{T}{3}\right) \right) - \frac{qT}{3} e^{-\frac{qT}{3}} \left(1 - P_1\left(S_0, \bar{S}_{\frac{T}{3}}, v_0, \frac{T}{3}\right) \right) \\ + \frac{r^* T}{3} e^{-\frac{r^* 2T}{3}} \left(1 - P_2\left(S_0, \bar{S}_{\frac{2T}{3}}, v_0, \frac{2T}{3}\right) \right) - \frac{qT}{3} e^{-\frac{q 2T}{3}} \left(1 - P_1\left(S_0, \bar{S}_{\frac{2T}{3}}, v_0, \frac{2T}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_4 = \gamma_0(S_0, G \times \delta, V_0, T, r^*, q) + \frac{r^* T}{4} e^{-\frac{r^* T}{4}} \left(1 - P_2\left(S_0, \bar{S}_{\frac{T}{4}}, v_0, \frac{T}{4}\right) \right) - \frac{qT}{4} e^{-\frac{qT}{4}} \left(1 - P_1\left(S_0, \bar{S}_{\frac{T}{4}}, v_0, \frac{T}{4}\right) \right) \\ + \frac{r^* 2T}{4} e^{-\frac{r^* 2T}{4}} \left(1 - P_2\left(S_0, \bar{S}_{\frac{2T}{4}}, v_0, \frac{2T}{4}\right) \right) - \frac{q 2T}{4} e^{-\frac{q 2T}{4}} \left(1 - P_1\left(S_0, \bar{S}_{\frac{2T}{4}}, v_0, \frac{2T}{4}\right) \right) \\ + \frac{r^* 3T}{4} e^{-\frac{r^* 3T}{4}} \left(1 - P_2\left(S_0, \bar{S}_{\frac{3T}{4}}, v_0, \frac{3T}{4}\right) \right) - \frac{q 3T}{4} e^{-\frac{q 3T}{4}} \left(1 - P_1\left(S_0, \bar{S}_{\frac{3T}{4}}, v_0, \frac{3T}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

肆、實驗結果與分析

最低收益保證型商品以目前市場流動的期間大多為長年期（5 年、6 年），不同於一般選擇權，契約期間都為 1 年期以內，而在 Grosen 和 Jorgensen 文中是考慮固定波動模型，由於最低收益保證型商品皆為長年期，所以固定波動之下無法探討波動度變動現象，只有明確瞭解波動度增加，商品價格會上昇的情形，而本研究模型具有長期的均數復歸值等其他參數的彈性可以加入探討，因此將探討期間

設定為 1 年至 6 年，所以皆下來分成幾個情況去探討；首先是評估美式最低收益保本率 δ ，分別為 1.0、0.9、0.8 的保證型商品價格，不同期間 (T) 為 1 到 6 年，結果由表 1 呈現；

[參照表 1]

由表 1 可以看模型定價在不同的保本率下，精準度從第一年到第六年的價格誤差皆為 1% 以下，而最低收益保證型商品價格會隨著保證期間增加價格也是遞增，此外若考慮投資公司保證金額比例 100% 到 80%，從結果可以看出，若投資公司給予投資者 100% 的保本率，此商品價格也就越高，若投資公司所給的保證金額越少，此類商品價格是降低的，藉由表一可以清楚看到此現象，再來是效率性，評價商品價格可以採用數值解法，但是要花較多時間，若利用分析解在短時間內計算出商品價格，表一起看出利用分析解計算一筆價格平均時間為 0.02 秒，而利用數值解法計算一筆價格需要平均時間 298.51 秒，時間效益為 14925.5 倍。接下來是考慮模型參數之間的變化對於價格的影響，參數基準值分別回歸速率 κ 為 0.05，長期均數復歸值 θ 為 0.09，波動度的波動度為 0.1，相關係數為 0，探討隨機波動模型中， κ 、 θ 、 ξ 、 ρ 變動對於價格變動的敏感度分析，並且和 Grosen 和 Jorgensen 定價模型（表中簡稱 G_J 模型）做比較，首先是回歸速率 κ 敏感度分析，表 2 以及圖 1（1-1、1-2、1-3）呈現；

[參照表 2、圖 1-1、圖 1-2、圖 1-3]

首先從表 2 可以看到，期間 1 年，可以看到採用本模型和 G_J 模型定價，並沒有明顯的差異，但是大部分的最低收益保證型商品期間為長年期，所以由表 2 期間為 5 年時，可以看到在保本率為 1.0 時，本模型和 G_J 模型就會有定價上的差異；而參數 κ 變動對於三種不同保本率的契約會有不一樣的情況發生， κ 變大表示波動度上下震動的程度較大，反之亦然，由圖 1-1、圖 1-2、圖 1-3 的一年期最低收益保證型商品價格，可以看到 κ 變大價格有明顯的遞增，由於只有一年期，

所以 κ 變大相對的波動度會變動大，所以直覺來看商品不論在任何保本率之下，價格都會變貴，但是若考慮長年期，以 5 年為例，透過圖 1-1、圖 1-2、圖 1-3 的五年的價格線，就會有不若 κ 變大，標的資產價格會大於保證金額機會較高，使得商品價格變貴，若是以 0.9 保本率來看，標的資產價格會大於保證金額機會較高或者較低，這些情況比較不明確，所以就會呈現圖 1-2 的 5 年期價格線的情況。接著探討長期均數復歸值 θ 變動對於價格的影響，當其他參數固定不變，探討 θ 從 0.07、0.08、0.09、0.10、0.11 的變化，由表 3 呈現：

[參照表 3]

從表 3 可以看出 θ 從小到大，價格是遞增的情況， θ 的角色就是長期波動度水準，若長期波動趨勢是遞增的，商品價格會是遞增情況，同理長期波動趨勢是遞減的，當然價格會是遞減的情況。接著探討標的資產與波動度相關係數 ρ 的變動對於價格變動的影響，探討 ρ 從 0.5、0.25、0.0、-0.25、-0.5 的變化，由表 4 呈現，

[參照表 4]

可以看出當相關係數從原先的正相關到負相關，價格變動是遞增的，相關係數 ρ 是標的資產價格報酬與波動度之間的關係，由於美式最低收益保證型商品可以看成賣權與現貨資產的投資組合，因此以賣權觀點去解釋，若為正相關情況，資產價格變動為正，波動變大，所以標的資產價格若為往上的趨勢比較容易，使得商品價格不易落在保證金額之下，則價值為零，反之，資產價格變動為負，波動變小，使得標的資產價格波動較緩和，所以在保證金額之下，價值較小，所以在正相關時，美式最低收益保證型商品價格便宜，若是負相關，資產價格變動為正，則波動變小，使得標的資產價值落在保證金額之上機率較低，相反地，資產價格變動為負，波動變大，使得標的資產價格會有向下趨勢，則資產價值落在保證金額之下機率較高，使得美式最低收益保證型商品價格較貴，而不論在任何的保本

率之下，參數 ρ 變動敏感度分析為相同情形，接下來探討參數 ζ 變動敏感度分析，探討 ζ 從 0.1、0.15、0.2、0.25、0.3 的變化，由於參數 ζ 與參數 ρ 對於波動度的變動是有相互影響的情況，所以表 5 呈現是不同的相關係數之下，對於不同的參數 ζ 所呈現的價格變動情形，

[參照表 5]

由於上一部份是探討相關係數敏感度分析，結果是相關係數由正相關到負相關時，美式最低收益商品價格變便宜，而 ζ 的影響是讓相關係數的影響乘上一乘數關係，因此當 ζ 變動較大會使得價格會有遞減的情況發生。

伍、結論與建議

本研究將過去關於最低收益商品定價模型，加入了隨機波動，透過結果可以看出採用一般模型定價，雖然在短年期的我們的模型和一般模型定價沒有差異定價，但是由於大部分的利率保證型商品，期間都為 5 到 6 年，因此若採用過去一般模型定價會有較大的誤差產生，此外利用本模型定價具備了參數的彈性空間，由於現在市場上的價格走勢並非是固定波動，採用隨機波動可以增加定價的彈性，此外本文提供的美式最低收益商品定價模型，計算時間極為快速，與最小平方方法比較 14000 多倍的時間效益。未來研究方向，增加對於國內最低收益型商品的應用於以及避險參數，而大部分商品都連結到外國貨幣，所已知後研究可以加入隨機利率的模型，來進行定價。

參考文獻：

1. Grosen, A. and Jorgensen, P.L., 1997, "Valuation of Early Exercisable Interest Rate Guarantees", *The Journal of Risk and Insurance*, Vol.64, No. 3, 481-503.
2. Barone-Adesi, G. and R.F. Whaley, 1987, "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *Journal of Finance*, 42,301-320.

3. Boyle, P. P. and Schwartz, E. S., 1977, “ Equilibrium Prices of Guarantees under Equity-Linked Contracts”, *Journal of Risk and Insurance*, 44, 639-660.
4. Brennan, M. and Schwartz, E. S., 1976, “ The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee”, *Journal of Financial Economics*, 3, 195-213.
5. Geske, R. and H.E. Johnson, 1984, “ The American Put Option Valued Analytically”, *Journal of Finance*, 39, 1511-1524.
6. Heston, S.L., 1993, ”A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility, with Applications to Bond and Currency Options”, *Review of Financial Studies* , 6, 27-343.
7. Huang, J., M.G. Subrahmanyam, and G.G. Yu, 1996, “ Pricing and hedging American options: a recursive integration method”, *The Review of Financial Studies*, 9, 277-300.
8. Hull, J. and A. White, 1987, “ The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities”, *Journal of Finance*, 42, 281-300.
9. Merton, R., 1973, ” The Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.

表 1、數值模擬法以及模型比較表

此表為模型分析解與數值解的比較，基本參數給定為起始標的資產價值 $G=100$ ，無風險利率為 0.1，最低報酬率為 0.02；利用 Longstaff 與 Schwarz (2001) 最小平方數值解法（表中用 LSM 表示）評價美式最低收益商品價格，其模擬路徑為 100,000 條，切期為 50，重複次數為 30 次。隨機波動模型參數給定參考 Heston 文獻中的參數值， $\sqrt{V_0}=0.3$ ， $\theta=0.09$ ， $\xi=0.1$ ， $\rho=0.0$ ，利用 (27) 式分析解定價美式最低收益保證商品（表中用 IG_4 表示），探討不同保本率（ $\delta=1、0.9、0.8$ ）、不同期間（ $T=1\sim 6$ 年）的美式最低收益保證商品價格。執行時間為計算價格一次的平均時間。

* Put_4.diff 表示定價誤差，其定義為 $(IG_4 - LSM) / LSM$ 。

$\delta=1$					
期間（年）	IG_4	LSM	標準差	變異係數	*Put_4.diff
1	108.547	108.779	0.09	0.1%	-0.21%
2	110.568	111.538	0.01	0.1%	-0.87%
3	112.044	111.735	0.01	0.1%	0.28%
4	113.401	112.537	0.02	0.1%	0.77%
5	114.755	114.272	0.04	0.1%	0.42%
6	116.138	116.267	0.03	0.1%	-0.11%
執行時間(s)	0.02	298.51			
$\delta=0.9$					
期間（年）	IG_4	LSM	標準差	變異係數	Put_4.diff
1	104.934	104.481	0.08	0.1%	0.43%
2	106.805	106.806	0.13	0.1%	0.00%
3	107.940	107.183	0.16	0.1%	0.71%
4	108.903	108.326	0.11	0.1%	0.53%
5	109.858	109.070	0.52	0.5%	0.72%
6	110.855	110.748	0.41	0.4%	0.10%
執行時間(s)	0.02	298.51			
$\delta=0.8$					
期間（年）	IG_4	LSM	標準差	變異係數	Put_4.diff
1	102.406	101.864	0.14	0.1%	0.53%
2	104.163	103.638	0.11	0.1%	0.51%
3	105.132	104.833	0.18	0.2%	0.28%
4	105.804	105.723	0.11	0.1%	0.08%
5	106.405	106.640	0.52	0.5%	-0.22%
6	107.023	106.957	0.41	0.4%	0.06%
執行時間(s)	0.02	298.51			

表 2、參數 κ 變動敏感度分析表

此表是比較不同的 κ 值對於價格變動的影響，參數給定始標的資產價值 $G=100$ ，無風險利率為 0.1，最低報酬率為 0.02， $\sqrt{V_0}=0.3$ 、 $\theta=0.09$ 、 $\xi=0.1$ 、 $\rho=0.0$ ， κ 變動單位為 0.05，保本率 $\delta=1.0、0.9、0.8$ ，期間 T 為 1 年、5 年。

$\delta \backslash \kappa$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	G_J 模型
期間 (1 年)						
1.0	108.52	108.52	108.52	108.52	108.53	108.89
0.9	104.91	104.91	104.91	104.92	104.92	104.91
0.8	102.40	102.40	102.40	102.40	102.40	102.26
期間 (5 年)						
1.0	114.69	114.67	114.66	114.66	114.65	113.56
0.9	109.77	109.76	109.76	109.76	109.76	109.46
0.8	106.29	106.29	106.30	106.30	106.31	106.34

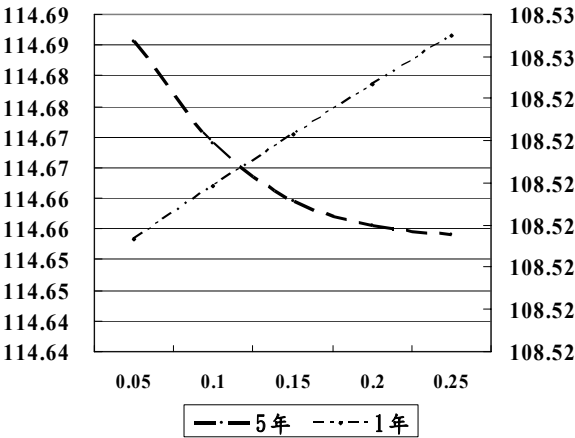


圖 1-1 保本率 1.0 與 不同 Kappa 參數

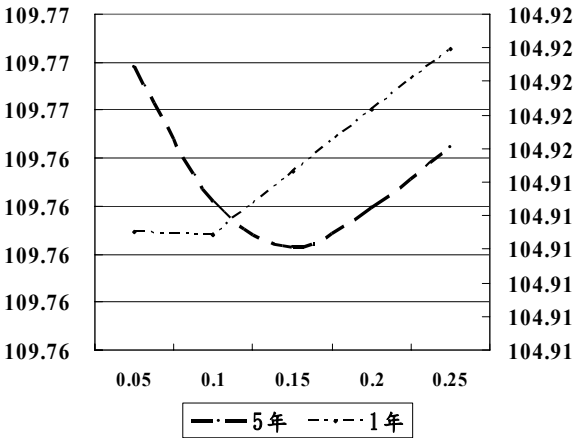


圖 1-2 保本率 0.9 與 不同 Kappa 參數

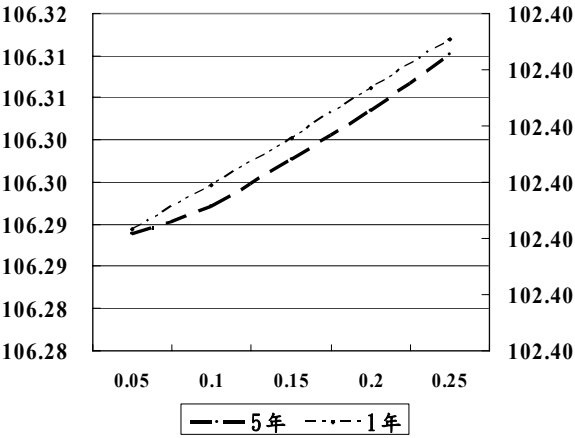


圖 1-3 保本率 0.8 與 不同 Kappa 參數

表 3、參數 θ 變動敏感度分析表

此表是比較不同的 θ 值對於價格變動的影響，參數給定始標的資產價值 $G=100$ ，無風險利率為 0.1，最低報酬率為 0.02， $\sqrt{V_0} = 0.3$ 、 $\kappa=0.05$ 、 $\xi = 0.1$ 、 $\rho = 0.0$ ， θ 變動單位為 0.01，保本率 $\delta=1.0$ 、0.9，期間 T 為 1 年、3 年、5 年。

$\delta = 1.0$					
θ 期間 (年)	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11
1	108.50	108.51	108.52	108.53	108.54
3	111.95	111.98	112.00	112.02	112.04
5	114.60	114.63	114.66	114.69	114.71

$\delta = 0.9$					
θ 期間 (年)	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11
1	104.89	104.90	104.91	104.93	104.94
3	107.83	107.87	107.90	107.94	107.97
5	109.74	109.79	109.83	109.88	109.93

表 4、參數 ρ 變動敏感度分析表

此表是比較不同的 θ 值對於價格變動的影響，參數給定始標的資產價值 $G=100$ ，無風險利率為 0.1，最低報酬率為 0.02， $\sqrt{V_0} = 0.3$ 、 $\kappa=0.05$ 、 $\xi = 0.1$ 、 $\theta = 0.09$ ， ρ 變動單位為 0.25，保本率 $\delta=1.0$ 、0.9，期間 T 為 1 年、3 年、5 年。

$\delta = 1.0$					
ρ 期間 (年)	0.5	0.25	0	-0.25	-0.5
1	108.25	108.39	108.52	108.65	108.76
3	111.13	111.58	112.00	112.38	112.74
5	113.86	114.23	114.66	115.15	115.66

$\delta = 0.9$					
ρ 期間 (年)	0.5	0.25	0	-0.25	-0.5
1	104.68	104.80	104.91	105.03	105.14
3	106.91	107.44	107.90	108.31	108.69
5	108.44	109.15	109.83	110.47	111.01

表 5、參數 ζ 變動敏感度分析表

此表是比較不同的 θ 值對於價格變動的影響，參數給定始標的資產價值 $G=100$ ，無風險利率為 0.1，最低報酬率為 0.02， $\sqrt{V_0} = 0.3$ 、 $\kappa=0.05$ 、 $\theta = 0.09$ ， ζ 變動單位為 0.05， ρ 為 0.5、0.0、-0.5，期間 T 為 1 年到 5 年。

$\rho = 0.5$					
期間 (年) / ζ	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
1	108.25	108.16	108.03	107.87	107.68
2	109.89	109.60	109.23	108.82	108.40
3	111.13	110.70	110.24	109.78	109.31
4	112.41	111.96	111.45	110.81	110.00
5	113.86	113.31	112.51	111.39	109.97
$\rho = 0.0$					
期間 (年) / ζ	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
1	108.52	108.47	108.40	108.31	108.21
2	110.52	110.45	110.35	110.23	110.09
3	112.00	111.91	111.80	111.66	111.48
4	113.33	113.23	113.09	112.88	112.59
5	114.66	114.54	114.31	113.93	113.43
$\rho = -0.5$					
期間 (年) / ζ	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
1	108.76	108.75	108.74	108.73	108.70
2	111.07	111.12	111.15	111.15	111.10
3	112.74	112.84	112.89	112.87	112.75
4	114.23	114.34	114.36	114.26	114.04
5	115.66	115.72	115.66	115.46	115.15